

Reifeprüfung 1986

Dokumentnummer: DX1035
 Fachgebiet: Reifeprüfung Mathematik 1986

(%i115) kill(all)\$

1. Aufgabe

1. Aufgabe:

Für einen bestimmten Artikel ist der Zusammenhang zwischen Absatzmenge x (in 100 Stück) und dem dazugehörigen Grenzerlös durch folgende Zahlenpaare gegeben:

x	2	4	7	9
$E'(x)$	99	78	46,5	25,5

Das sind die gegebenen Daten

(%i1) X:[2,4,7,9];GE:[99,78,46.5,25.5];

(%o1) [2 , 4 , 7 , 9]

(%o2) [99 , 78 , 46.5 , 25.5]

a) Berechnen Sie die Grenzerlösfunktion $E'(x) = a \cdot x + b$ und davon ausgehend Erlös- und Nachfragefunktion!

(%i3) Y:GE /* Grenzerlös GE auf Y umbenennen,
 damit können die Regressionsgleichungen
 leichter verwendet werden */;

(%o3) [99 , 78 , 46.5 , 25.5]

(%i4) n:length(X) /* den Datenumfang bestimmen */;

(%o4) 4

Gleichungen für lineare Regression

(%i5) $g1: a \cdot \sum(X[i]**2, i, 1, n) + b \cdot \sum(X[i], i, 1, n) = \sum(X[i] \cdot Y[i], i, 1, n);$

(%o5) $22 \mathbf{b} + 150 \mathbf{a} = 1065.0$

(%i6) $g2: a \cdot \sum(X[i], i, 1, n) + b \cdot n = \sum(Y[i], i, 1, n);$

(%o6) $4 \mathbf{b} + 22 \mathbf{a} = 249.0$

Lösung des Gleichungssystems

(%i7) $l: \text{solve}([g1, g2], [a, b]);$

rat: replaced -1065.0 by -1065/1 = -1065.0

rat: replaced -249.0 by -249/1 = -249.0

(%o7) $[[\mathbf{a} = -\frac{21}{2}, \mathbf{b} = 120]]$

Ergebnis: Regressionsgerade für die Grenzerlös

(%i8) $\text{Grenzerloes}: y = a \cdot x + b, l;$

(%o8) $\mathbf{y} = 120 - \frac{21 \mathbf{x}}{2}$

Grenzerlösfunktion bestimmen

(%i9) $rs: \text{rhs}(\text{Grenzerloes});$

(%o9) $120 - \frac{21 \mathbf{x}}{2}$

(%i10) $\text{GE}(\mathbf{x}) := rs;$

(%o10) $\text{GE}(\mathbf{x}) := 120 - \frac{21 \mathbf{x}}{2}$

Der Grenzerlös ist die Ableitung vom Erlös, daher muss man in der Umkehrung das Integral bestimmen

(%i11) $\text{E}: \text{integrate}(\text{GE}(\mathbf{x}), \mathbf{x});$

(%o11) $120 \mathbf{x} - \frac{21 \mathbf{x}^2}{4}$

Die Erlösfunktion

(%i12) E(x):="E;

(%o12) $E(x) := 120x - \frac{21x^2}{4}$

(%i13) p:E/x,expand;

(%o13) $120 - \frac{21x}{4}$

Die Nachfragefunktion

(%i14) p(x):="p;

(%o14) $p(x) := 120 - \frac{21x}{4}$

b) Die dazugehörige Kostenfunktion lautet:

$$K(x) = -0,5x^2 + 10x + 120$$

Wie groß ist die gewinnmaximale Absatzmenge und der dazugehörige Verkaufspreis?

Die Kostenfunktion ist angegeben

(%i15) K:-0.5*x**2+10*x+120;

(%o15) $-0.5x^2 + 10x + 120$

(%i16) K(x):="K;

(%o16) $K(x) := -0.5x^2 + 10x + 120$

(%i17) G(x):=E(x)-K(x);

(%o17) $G(x) := E(x) - K(x)$

(%i18) ab:diff(G(x),x);

(%o18) $110 - 9.5x$

(%i19) l:solve(ab=0,x),numer;

rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5

rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5

rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5

rat: replaced -11.5789473684211 by -220/19 = -11.5789473684211

(%o19) [$x = 11.57894736842105$]

Gewinnmaximale Absatzmenge (Cournotsche Menge)

(%i20) xc:x,l;xc:floor(xc*100+0.5)/100.0;

(%o20) 11.57894736842105

(%o21) 11.58

Der Cournotsche Preis ist der zur gewinnmaximalen Menge zugehörige Preis

(%i22) pc:p(xc);

(%o22) 59.205

(%i23) Cournotscher_Punkt:[xc,pc];

(%o23) [11.58 , 59.205]

c) Bestimmen Sie die Gewinn Grenzen!

(%i24) l:solve(G(x)=0,x),numer;

rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75

rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75

rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25

rat: replaced 396.3836525387998 by 63025/159 = 396.3836477987421

rat: replaced 396.3836525387998 by 63025/159 = 396.3836477987421

(%o24) [$x = 1.147798742138365$, $x = 22.01009599470374$]

Der kleinere Wert ist die Nutzenschwelle, auch
Gewinnschwelle oder Break Even Point

(%i25) $NS:x,l[1];NS:\text{floor}(NS*100+0.5)/100.0;$

(%o25) 1.147798742138365

(%o26) 1.15

Der größere Wert ist die Nutzenschwelle, auch
Gewinngrenze

(%i27) $NG:x,l[2];NG:\text{floor}(NG*100+0.5)/100.0;$

(%o27) 22.01009599470374

(%o28) 22.01

(%i29) $\text{Gewinnzone:[NS,NG];}$

(%o29) [1.15 , 22.01]

2. Aufgabe

2. Aufgabe

Für den Ankauf eines Grundstückes und die Errichtung überdachter Abstellplätze für 25 PKW werden folgende Konditionen vereinbart:

Anzahlung S 150.000,-- und 16 halbjährliche nachschüssige Raten zu je S 15.000,--.

Was gegeben ist

```
(%i30) p:8;i:p/100.0;r:1+i;v:1/r;anzahlung:150000;hj_rate:15000;pkw:25;n2:16;
```

```
(%o30) 8
```

```
(%o31) 0.08
```

```
(%o32) 1.08
```

```
(%o33) 0.92592592592593
```

```
(%o34) 150000
```

```
(%o35) 15000
```

```
(%o36) 25
```

```
(%o37) 16
```

einen äquivalenten Zinssatz bestimmen

```
(%i38) g:(1+i2)**2=r;
```

```
(%o38) (i2 + 1)2 = 1.08
```

```
(%i39) l:solve(g,i2),numer;
```

```
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
```

```
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
```

```
rat: replaced 0.04 by 1/25 = 0.04
```

```
rat: replaced 51.96152422706631 by 139101/2677 = 51.96152409413523
```

```
rat: replaced 51.96152422706631 by 139101/2677 = 51.96152409413523
```

```
(%o39) [ i2 = - 2.039230481882705 , i2 = 0.039230481882705 ]
```

```
(%i40) i2:ev(i2,l[2]) /* äquivalenter Halbjahreszinssatz */;
```

```
(%o40) 0.039230481882705
```

(%i41) $r2:1+i2 /* \text{äquivalenter Aufzinsungsfaktor für das Halbjahr} */;$

(%o41) 1.039230481882705

(%i42) $v2:1/r2 /* \text{äquivalenter Abzinsungsfaktor für das Halbjahr} */;$

(%o42) 0.962250451111106

Barwert der Aufwendungen

(%i43) $B:\text{anzahlung}+\text{hj_rate}*(1-v2^{**}n2)/i2;B:\text{floor}(B*100+0.5)/100.0;$

(%o43) 325780.8232224384

(%o44) 325780.82

(%i45) $\text{errichtung}:B;$

(%o45) 325780.82

a) Welche monatliche vorschüssige Benützungsgebühr muß pro Stellplatz verlangt werden, wenn die laufenden monatlichen Betriebskosten S 9.000,-- betragen und ein Jahresbruttogewinn von S 25.000,-- erwirtschaftet werden soll? Man rechnet mit einer Nutzungsdauer von 20 Jahren und setzt Gewinn und Betriebskosten nachschüssig an. ($i = 8\%$)

(%i46) $n:20;\text{jahresbruttogewinn}:25000;\text{monatsbetriebskosten}:9000;$

(%o46) 20

(%o47) 25000

(%o48) 9000

(%i49) $r12:r^{**}(1/12);v12:1/r12;i12:r12-1;$

(%o49) 1.006434030110003

(%o50) 0.99360710198829

(%o51) 0.0064340301100034

(%i52) $\text{aufwendung}:\text{errichtung}+\text{jahresbruttogewinn}*(1-v^{**}n)/i+\text{monatsbetriebskosten}*(1-v12^{**}(12*n))/i12;$

(%o52) 1669934.078004944

(%i53) aufwendung:floor(aufwendung*100+0.5)/100.0;

(%o53) 1669934.08

(%i54) d12:i12/r12;

(%o54) 0.0063928980117059

(%i55) g:aufwendung=12*miete*(1-v12**(12*n))/d12;

(%o55) 1669934.08 = 1474.358185269433 **miete**

(%i56) l:solve(g,miete),numer;

rat: replaced 1669934.08 by 20039209/12 = 1669934.083333333

rat: replaced -1474.35818526943 by -98782/67 = -1474.35820895522

rat: replaced 1669934.083333333 by 20039209/12 = 1669934.083333333

rat: replaced -1474.35820895522 by -98782/67 = -1474.35820895522

rat: replaced -0.001243781094527 by -1/804 = -0.001243781094527

rat: replaced -1132.65153148684 by -74755/66 = -1132.65151515152

(%o56) [**miete** = 1132.651515151515]

Was man für den Stellplatz verlangen muss
(monatliche Benützungsgebühr)

(%i57) miete:ev(miete,l);miete:floor(miete*100+0.5)/100.0;

(%o57) 1132.651515151515

(%o58) 1132.65

b) Für das Zufahrtsrecht zur Anlage müssen an eine Genossenschaft alljährlich nachschüssig S 10.000,-- bezahlt werden. Für die Herabsetzung dieser ewigen Rente wird der Genossenschaft zum teilweisen Ausgleich ein nicht als Bauland ausgewiesenes Grundstück im Wert von S 50.000,-- angeboten. Außerdem soll die Gebühr jeweils am Monatsende entrichtet werden. Wie hoch sind die neuen monatlichen Raten? ($f = 4\%$)

(%i59) kill(B);

(%o59) *done*

(%i60) f2:0.04;v:(1-f2)**2;r:1/v;i:r-1;

(%o60) 0.04

(%o61) 0.9216

(%o62) 1.0850694444444444

(%o63) 0.0850694444444444

(%i64) R:10000;

(%o64) 10000

(%i65) g:R=B*i;

(%o65) 10000 = 0.0850694444444444 **B**

(%i66) l:solve(g,B),numer;

rat: replaced -0.0850694444444444 by -49/576 = -0.0850694444444444

rat: replaced -0.0850694444444444 by -49/576 = -0.0850694444444444

rat: replaced -0.0017361111111111 by -1/576 = -0.0017361111111111

rat: replaced -117551.020408163 by -5760000/49 = -117551.020408163

(%o66) [**B** = 117551.0204081633]

(%i67) B:ev(B,l);B:floor(B*100+0.5)/100.0;

(%o67) 117551.0204081633

(%o68) 117551.02

(%i69) B:B-50000 /* Einsatz des Grundstückes zur Minderung der ewigen Rente */;

(%o69) 67551.02

(%i114) R_Jahr:B*i;

(%o114) 5746.527743055554

Neue monatliche Gebühr für das Zufahrtsrecht, wenn das Grundstück hergegeben wird

(%i116) R_Monat:B*i12;R_Monat:floor(R_Monat*100+0.5)/100.0;

(%o116) 434.6252966414439

(%o117) 434.63

3. Aufgabe

3. Aufgabe

Drei Zuckerfabriken stellen zusammen monatlich 200t Zucker her und zwar in A 40t, in B 70t und in C 90t. Zwei Großhändler in D und E benötigen diese Mengen und zwar 60t und 140t.

Die Transportkosten betragen:

von A nach D	20 GE/t
von B nach D	20 GE/t
von C nach D	30 GE/t

von A nach E	10 GE/t
von B nach E	30 GE/t
von C nach E	50 GE/t

Stellen Sie die Transporttabelle für dieses Problem auf und bestimmen Sie die minimalen Transportkosten!

Anmerkung: es handelt sich um ein geschlossenes klassisches Transportproblem. Man kann solche nach dem Simplexverfahren lösen.

`(%i72) load(simplex) /* dieses Unterprogramm wird verwendet */;`

`(%o72)`

`C:/Programme/Maxima-5.18.1/share/maxima/5.18.1/share/contrib/simplex/simplex.mac`

Wir verwenden anstelle von A,B,C die Bezeichnungen A1,A2,A3 als Anbieter und anstelle von D und E die Bezeichnungen B1,B2 als Nachfrager.

Das soll das Verständnis des mathematischen Modells erleichtern.

Diese Variablen wollen wir verwenden

	B1	B2
A1	x_{11}	x_{12}
A2	x_{21}	x_{22}
A3	x_{31}	x_{32}

Liefermengen

Kostenübersicht je Einheit

	B1	B2
A1	20	10
A2	20	30
A3	30	50

Lieferkosten

Nichtnegativitätsbedingungen (es kann keine negativen Liefermengen geben)

(%i73) $u1:x_{11} \geq 0; u2:x_{12} \geq 0; u3:x_{21} \geq 0; u4:x_{22} \geq 0; u5:x_{31} \geq 0; u6:x_{32} \geq 0;$

(%o73) $x_{11} \geq 0$

(%o74) $x_{12} \geq 0$

(%o75) $x_{21} \geq 0$

(%o76) $x_{22} \geq 0$

(%o77) $x_{31} \geq 0$

(%o78) $x_{32} \geq 0$

Was angeboten wird

(%i79) $u7:x_{11}+x_{12}=40;u8:x_{21}+x_{22}=70;u9:x_{31}+x_{32}=90;$

(%o79) $x_{12} + x_{11} = 40$

(%o80) $x_{22} + x_{21} = 70$

(%o81) $x_{32} + x_{31} = 90$

Was nachgefragt wird

(%i82) $u10:x_{11}+x_{21}+x_{31}=60;u11:x_{12}+x_{22}+x_{32}=140;$

(%o82) $x_{31} + x_{21} + x_{11} = 60$

(%o83) $x_{32} + x_{22} + x_{12} = 140$

Die Kostenfunktion als Zielfunktion

(%i84) $ZF:20*x_{11}+10*x_{12}+20*x_{21}+30*x_{22}+30*x_{31}+50*x_{32};$

(%o84) $50 x_{32} + 30 x_{31} + 30 x_{22} + 20 x_{21} + 10 x_{12} + 20 x_{11}$

Alle Nebenbedingungen

(%i85) $NB:[u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8,u9,u10,u11];$

(%o85) $[x_{11} \geq 0 , x_{12} \geq 0 , x_{21} \geq 0 , x_{22} \geq 0 , x_{31} \geq 0 , x_{32} \geq 0 , x_{12} + x_{11} = 40 , x_{22} + x_{21} = 70 , x_{32} + x_{31} = 90 , x_{31} + x_{21} + x_{11} = 60 , x_{32} + x_{22} + x_{12} = 140]$

Anwendung des Simplexverfahrens

(%i86) $l:minimize_lp(ZF,NB);$

(%o86) $[5800 , [x_{32} = 30 , x_{31} = 60 , x_{22} = 70 , x_{21} = 0 , x_{12} = 40 , x_{11} = 0]]$

4. Aufgabe

4. Aufgabe

a) In einem Buch mit 700 Seiten sind 420 Druckfehler.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf einer gegebenen Seite

i) genau 2
ii) weniger als 3
iii) 2 oder mehr

Druckfehler sind!

Verwenden Sie die Poissonverteilung!

(%i87) $m:420/700.0;$

(%o87) 0.6

(%i88) $W(k):=m**k/k!*exp(-m);$

(%o88) $W(k) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$

(%i89) $W_i:W(2),numer;W_i:floor(W_i*1000+0.5)/1000.0;$

(%o89) 0.098786094496925

(%o90) 0.099

(%i91) $W_ii:sum(W(k),k,0,2),numer;W_ii:floor(W_ii*1000+0.5)/1000.0;$

(%o91) 0.97688471224737

(%o92) 0.977

(%i93) $W_iii:1-sum(W(k),k,0,1),numer;W_iii:floor(W_iii*1000+0.5)/1000.0;$

(%o93) 0.12190138224956

(%o94) 0.122

b) In einer Fabrik sind 2% der hergestellten Stücke defekt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, daß bei einer Stichprobe von 100 Stück genau 3 defekt sind

Lösen Sie diese Aufgabe mit der Binomialverteilung und approximieren Sie die Lösung mit Hilfe der Poissonverteilung.

Binomialverteilung

(%i95) p:0.02;n:100;

(%o95) 0.02

(%o96) 100

(%i97) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);

(%o97) $W(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(%i98) W:W(3);W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;

(%o98) 0.18227594104652

(%o99) 0.182

Poissonverteilung

(%i100) m:2;

(%o100) 2

(%i101) W(k):=m**k/k!*exp(-m);

(%o101) $W(k) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$

(%i102) W:W(3),numer;W;floor(W*1000+0.5)/1000.0;

(%o102) 0.18044704431548

(%o103) 0.18044704431548

(%o104) 0.18

c) 3% aller Menschen sind Linkshänder. Gib die Wahrscheinlichkeit an, daß unter 100 Personen 4 oder mehr Linkshänder sind!

Binomialverteilung

(%i105) p:0.03;n:100;

(%o105) 0.03

(%o106) 100

(%i107) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);

(%o107) $W(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

(%i108) W:=sum(W(k),k,4,100);W:=floor(W*1000+0.5)/1000.0;

(%o108) 0.35275078953598

(%o109) 0.353

Poissonverteilung

(%i110) m:3;

(%o110) 3

(%i111) W(x):=m**x/k!*exp(-m);

(%o111) $W(x) := \frac{m^x}{x!} \exp(-m)$

(%i112) W:=1-sum(W(k),k,0,3),numer;W:=floor(W*1000+0.5)/1000.0;

(%o112) 0.35276811121777

(%o113) 0.353