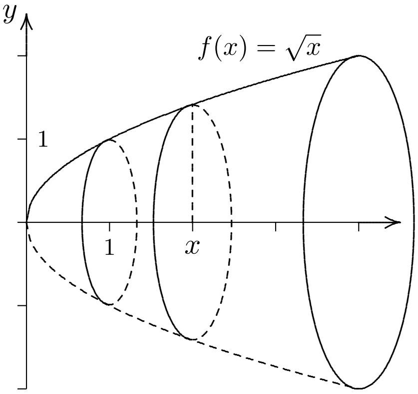
Rotationsvolumen



Um das Volumen eines Rotationskörpers zu berechnen, ist der Inhalt der Querschnittsfläche an der Stelle x zu bestimmen.

Es ist: $Q(x) = \pi \cdot (f(x))^2$, da die Fläche des Kreises mit dem Radius r $A = \pi r^2$ beträgt.

Daher gilt:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx \;=\; \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Die Kugel

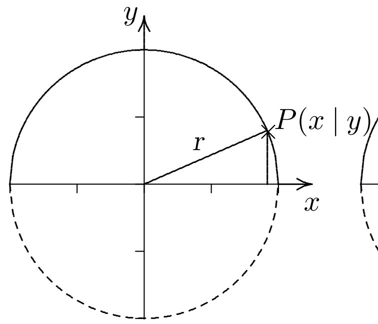
Für einen Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt: $x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).

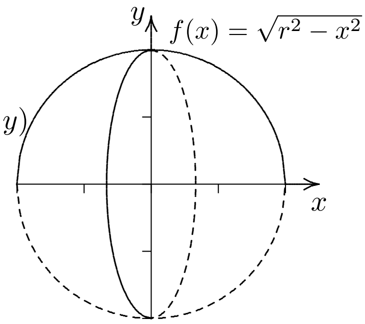
Nach y aufgelöst, ergibt sich: $\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

d.h. $\quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx$$

$$= 2\,\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \;=\; \dots \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$



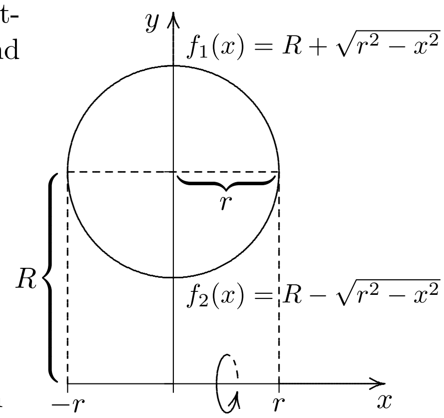


Der Torus

Durch die Gleichung $x^2+(y-R)^2 = r^2$ ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid R)$ und dem Radius r gegeben. Durch Rotation dieses Kreises um die x-Achse entsteht ein Körper von der Form eines Rettungsringes, ein sog. Torus. Diesen Rotationskörper können wir als Differenz zweier Rotationskörper auffassen, die durch Rotation von Flächenstücken entstehen, die im Intervall $[-r,\, r]$ von der x-Achse und dem oberen und unteren Halbkreis mit den Gleichungen

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

begrenzt werden.



$$V_{Torus} \;=\; \pi \int_{-r}^{r} (f_1(x))^2\,dx \;-\; \pi \int_{-r}^{r} (f_2(x))^2\,dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} [(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2]\,dx$$

Durch Einsetzen der Funktionsterme und Zusammenfassen ergibt sich

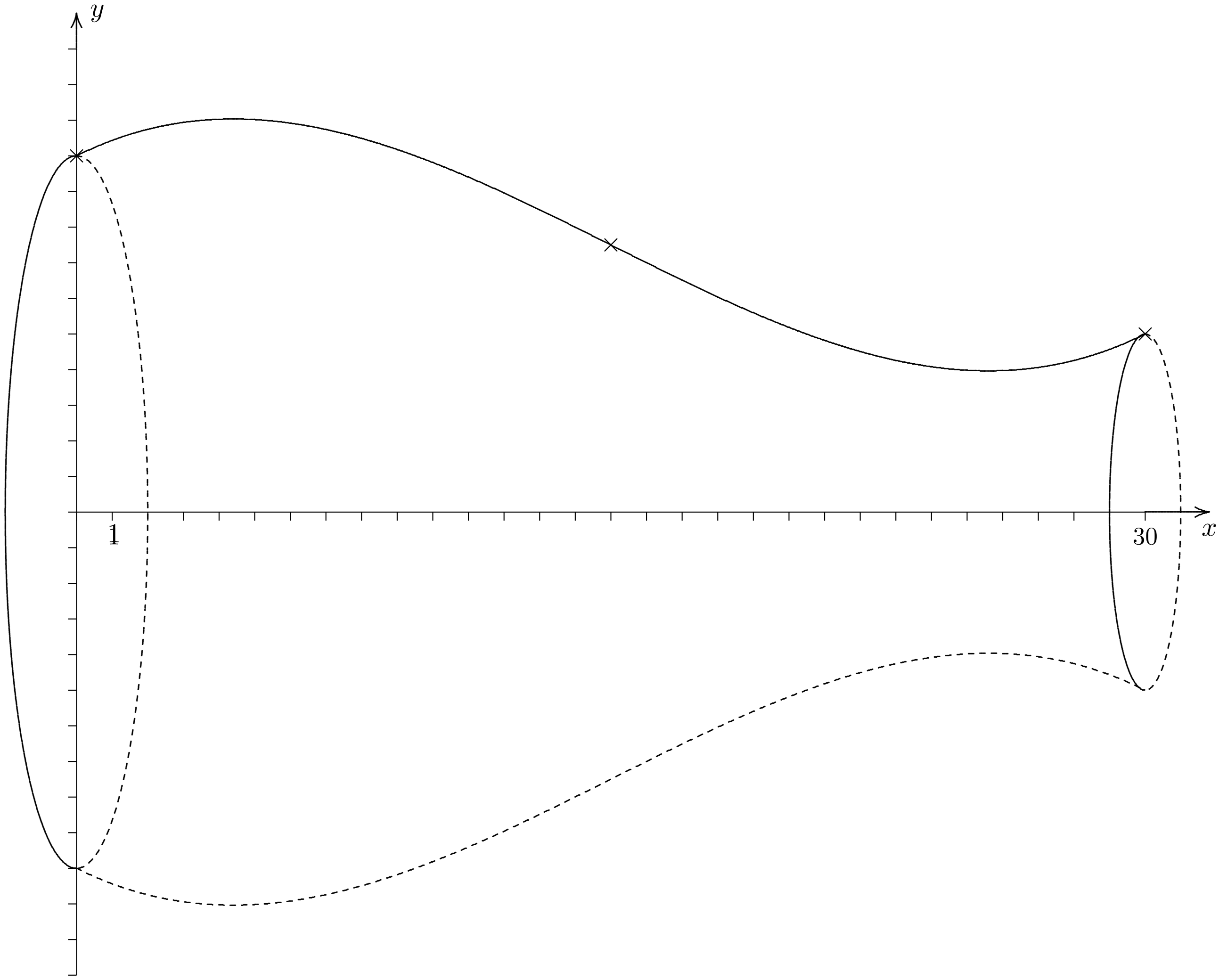
$$V_{Torus} \;=\; 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Das Integral kann als Flächeninhalt eines Halbkreises mit dem Radius r interpretiert werden. Infolgedessen gilt

$$V_{Torus} \;=\; 4\pi R \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \;=\; 2\pi R \cdot \pi r^2$$

Die Volumenformel ist ein Spezialfall der *Guldinschen Regel*, nach der das Volumen eines Rotationskörpers gleich dem Produkt des Inhalts der rotierenden Fläche mit der Wegstrecke ist, die der Schwerpunkt des Flächenstücks bei der Rotation zurücklegt (P. Guldin, 1577 - 1643).

Vase GTR



1. Der Graph verläuft durch $A(0 \mid 10)$, d.h. $f(0) = 10$ (in cm).
2. Der Graph verläuft durch $B(30 \mid 5)$, d.h. $f(30) = 5$.
3. Der Graph hat an der Stelle $x = 15$ die Steigung $-\frac{1}{2}$, d.h. $f'(15) = -\frac{1}{2}$.
4. Der Graph hat an der Stelle $x = 15$ einen Wendepunkt, d. h. $f''(15) = 0$.

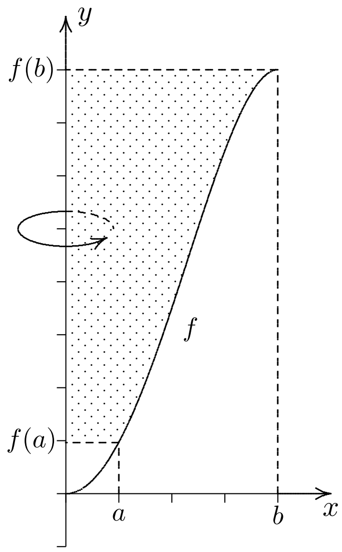
Das ergibt für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ das Gleichungssystem:

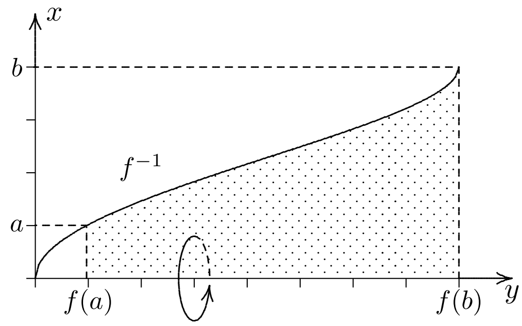
$$\begin{aligned} d &= 0 \\ 27000a + 900b + 30c + d &= 5 \\ 675a + 30b + c &= -\frac{1}{2} \\ 90a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Die Funktion lautet: $f(x) = \frac{1}{675}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{2}x + 10$

Flächeninhalt: $A = 225\ cm^2$
Volumen: $V = 5991{,}466\ cm^3$

Volumen bei Rotation um die y-Achse





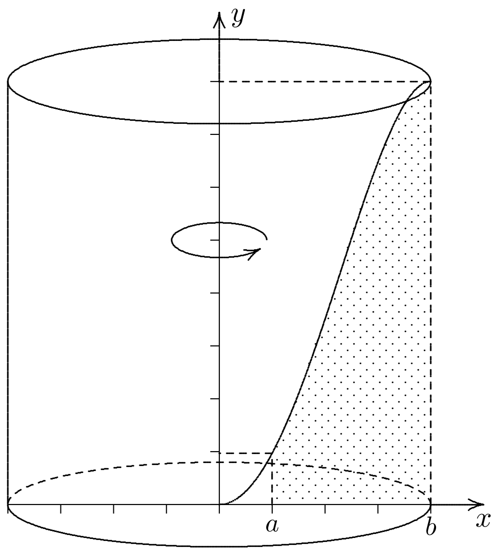
Erläutere die Formeln, so dass sie plausibel erscheinen.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Volumenelement.

$$V_x \;=\; \pi \int_a^b \left[\, f(x) \right]^2 \, dx$$

$$V_y \;=\; \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left[\, f^{-1}(y) \right]^2 \, dy$$

$$V_y \;=\; \pi \int_a^b x^2 \cdot f'(x) \, dx$$

$$V_{\text{Scheibe}} = \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{dy}$$



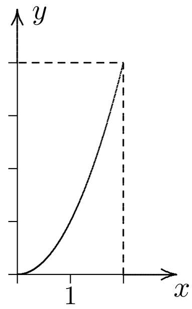
Schalenmethode

$$V \;=\; 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx$$

$$V_{\text{Hohlzylinder}} = 2\pi x \cdot f(x) dx$$

Beispiele

1. $f(x) = x^2, \quad \mathbb{D} = \big[0,\, 2\big]$



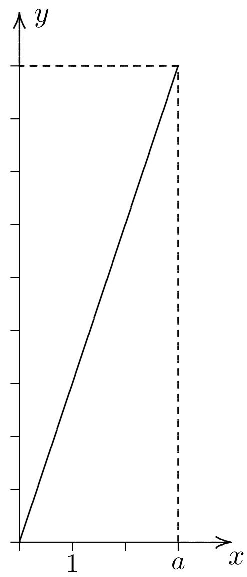
$$V_x \;=\; \pi \int_0^2 \big[\,f(x)\big]^2\,dx \;=\; \frac{32\pi}{5}$$

$$V_y \;=\; \pi \int_0^4 \big[\,f^{-1}(y)\big]^2\,dy \;=\; 8\pi$$

$$V_y \;=\; \pi \int_0^2 x^2 \cdot f'(x)\,dx \;=\; 8\pi$$

$$V \;=\; 2\pi \int_0^2 x \cdot f(x)\,dx \;=\; 8\pi$$

2. $f(x) = 3x, \quad \mathbb{D} = \big[0,\, a\big]$



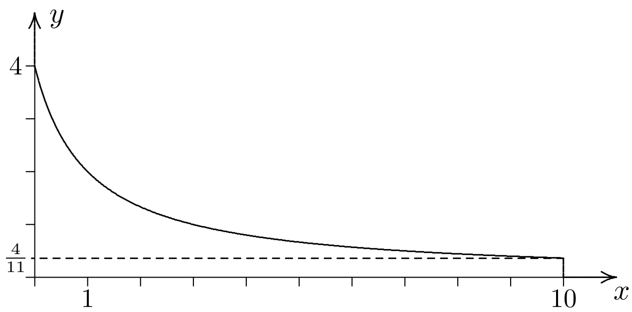
$$V_x \;=\; \pi \int_0^a \big[\,f(x)\big]^2\,dx \;=\; 3\pi a^3$$

$$V_y \;=\; \pi \int_0^{3a} \big[\,f^{-1}(y)\big]^2\,dy \;=\; \pi a^3$$

$$V_y \;=\; \pi \int_0^a x^2 \cdot f'(x)\,dx \;=\; \pi a^3$$

$$V \;=\; 2\pi \int_0^a x \cdot f(x)\,dx \;=\; 2\pi a^3$$

3. $f(x) = \dfrac{4}{x+1}, \quad \mathbb{D} = \big[0,\, 10\big]$ (GTR)



$$V_x \;=\; \pi \int_0^{10} \big[\,f(x)\big]^2\,dx \;=\; 45{,}70$$

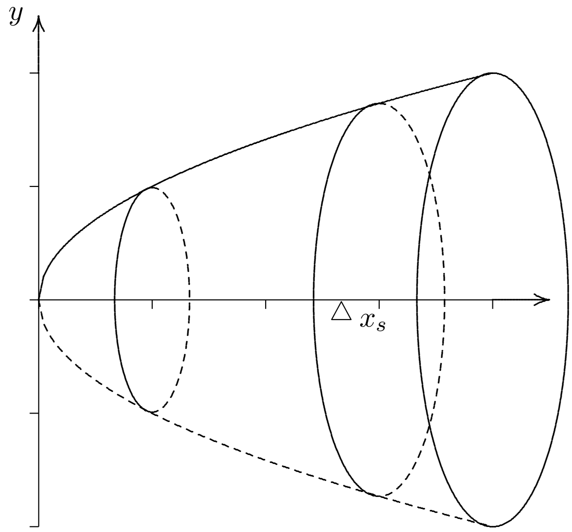
$$V_y \;=\; \pi \int_{\frac{4}{11}}^4 \big[\,f^{-1}(y)\big]^2\,dy + V_{\text{Zylinder}}$$

$$\;=\; 76{,}82 + 114{,}24 = 191{,}06$$

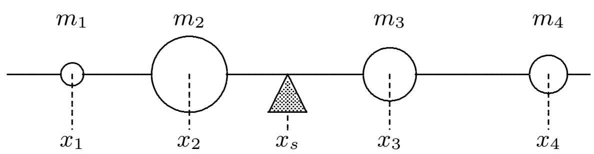
$$V \;=\; 2\pi \int_0^{10} x \cdot f(x)\,dx \;=\; 191{,}06$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Bei Rotation um die x-Achse und bei homogener Massenverteilung liegt der Schwerpunkt des Rotationskörpers wegen der Symmetrie auf der x-Achse.



Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(x_s - x_1)\,m_1 + (x_s - x_2)\,m_2 \;=\; (x_3 - x_s)\,m_3 + (x_4 - x_s)\,m_4$$

Auf den Rotationskörper übertragen bedeutet dies:

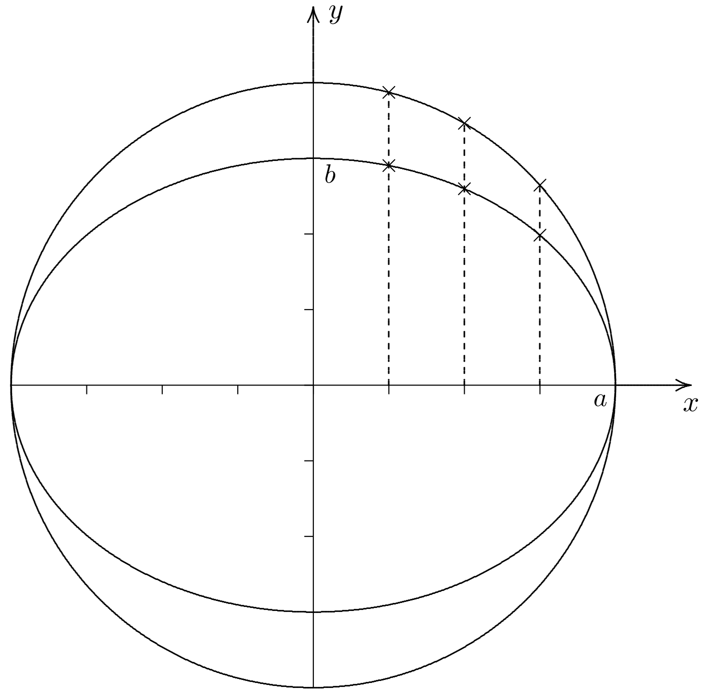
$$\sum_{x<x_s} (x_s - x)\,\pi\,[\,f(x)\,]^2 \Delta x \;=\; \sum_{x_s<x} (x - x_s)\,\pi\,[\,f(x)\,]^2 \Delta x$$

$$\Longrightarrow \quad x_s \;=\; \frac{\sum x\,\pi\,[\,f(x)\,]^2 \Delta x}{\sum \pi\,[\,f(x)\,]^2 \Delta x} \qquad \text{(Klammern auflösen, zusammenfassen)}$$

und damit

$$x_s \;=\; \frac{\pi \displaystyle\int_a^b x\,[\,f(x)\,]^2\,dx}{V}$$

Ellipsengleichung



Die Ellipse ist ein gestauchter Kreis.

Aus der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

erhalten wir die Funktionsgleichung für den oberen/unteren Halbkreis:

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Die y-Werte werden nun mit $\frac{b}{a}$ multipliziert.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Durch Quadrieren und Umformen erhalten wir die Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Die Rotation der Ellipsenfläche um die x-Achse erzeugt ein Ellipsoid.
Zeige, dass dessen Volumen $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ beträgt.